一个包含 Smarandache 函数的混合均值

贺艳峰 [1,2]，田清 [2]

(1. 延安大学计算机科学学院, 陕西 延安 716000 ; 2. 西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

摘要：利用素数函数 $\pi(x)$ 和 Riemann zeta- 函数 $\zeta(s)$ 的解析性质，通过分区间讨论的方法研究了一个包含 Smarandache 函数的加权均值, 并给出了它的一个渐近公式.

关键词：Smarandache 函数;Abel 恒等式;Riemann zeta- 函数

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2009)01-0129-04

1 引言

对任意正整数 n,Smarandache 函数 $\overline{\Omega}(n)$ 定义为:$\overline{\Omega}(n)=\alpha_1\cdot p_1+\alpha_2\cdot p_2+\cdots+\alpha_r\cdot p_r$, 其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$. 类似地，Smarandache $U(n)$ 函数定义为: $U(1)=1;n>1$ 时, 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式, 则 $U(n)=\max\limits_{1\le i\le r}\{\alpha_1\cdot p_1,\alpha_2\cdot p_2,\cdots,\alpha_r\cdot p_r\}$, 可以很容易地证明,$U(n)$ 是可乘函数. 另外,$P(n)$ 为关于 n 的最大素因子函数. 对于函数 $\overline{\Omega}(n)$,$U(n)$ 和 $P(n)$, 许多学者进行了研究, 获得了一系列较好的结果. 例如文 [1] 研究了包含 $\overline{\Omega}(n)$ 函数的一个级数分布性质, 并给出了一个恒等式

$$\sum_{n-1}^{\infty}\frac{\overline{\Omega}(n)}{n^s}=\zeta(s)\frac{\sum\limits_p\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\sum\limits_p\frac{1}{p^s}}$$

文 [2] 研究了 $U(n)$ 的均值分布性质, 并得到了一个渐近公式

$$\sum_{n\le x}(U(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann zeta- 函数. 文 [3] 利用初等方法证明了, 对任意的实数 $x>1$, 有

$$\sum_{n\le x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta(\frac{2}{5})\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

文 [4] 证明了对任意的正整数 n, $\sum\limits_{d|n}U(d)=n$, 有且只有两个解, 即 $n=1,28$. 而文 [5] 用 $p(n)$ 去逼近函数 $V(n)$, 得到了一个渐近公式

$$\sum_{n\le x}(V(n)-p(n))^2=x^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right)$$

收稿日期：2007-12-26.

基金项目：国家自然科学基金 (10671155).

作者简介：贺艳峰 (1976-), 硕士, 研究方向: 数论.

其中 $p(n)$ 是最小素因子函数,$c_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是常数.

本文借鉴以上作者的方法, 并结合素数函数 $\pi(x)$ 和 Riemann zeta- 函数 $\zeta(s)$ 的解析性质, 通过分区间讨论的方法研究了一个包含 Smarandache 函数的加权均值, 并给出了它的一个混合均值公式, 即就是:

定理 设 $n>1$ 是正整数, 则有 $\sum\limits_{n\le x}U(n)P(n)=x^3\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{f_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$ 其中 f_i 是可计算常数.

2 两个简单引理

为了完成定理的证明，我们需要下面两个简单引理:

引理 1 设 $x>1$ 是实数, 则有 $\pi(x)=\sum\limits_{p\le x}1=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$, 其中 $a_i=(i-1)!$.

证明 参阅文 [6] 的 §3.1 的定理 3.2.

引理 2 设 p 是素数, 则有 $\sum\limits_{p\le x}p^2=\frac{1}{3}x^3\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$.

证明 由引理 1 及文 [7] 中 Abel 恒等式得

$$\begin{aligned}&\sum_{p\le x}p^2=x^2\pi(x)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}y\pi(y)\mathrm{d}y\\&=x^2\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)\right)-2\int_{\frac{3}{2}}^{x}y\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)\mathrm{d}y\\&=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)-\frac{2}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}\frac{1}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}$$

于是完成了引理 2 的证明.

3 定理的证明

对任意的正整数 $n>1$, 令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的标准分解式. 把区间 $[1,n]$ 的所有正整数分成如下五种情况:

A: $P(n)>\sqrt{n}$;

B: $\sqrt[3]{n}<P(n)\le\sqrt{n}$, 且 $n=mP^2(n),P(n)\dagger m$;

C: $\sqrt[3]{n}<p_1<P(n)\le\sqrt{n},n=mp_1P(n)$, 其中 p_1 是素数, 且 $p_1,P(n)$ 与 m 两两互素;

D: $\sqrt[3]{n}<P(n)\le\sqrt{n}$,$n=mP(n)$,$m=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_r^{\beta_s}$ 是 m 的标准分解式, 而且 $q_i\le\sqrt[3]{n},i=1,2,\cdots,s$;

E: $P(n)\le\sqrt[3]{n}$.

下面我们逐一进行计算:

(i) 当 n 属于 A 情况时, 此时可设 $n=mP(n)$, 则有 $m<P(n),U(n)=P(n)$, 从而

$$\sum_{n\in A}U(n)P(n)=\sum_{n\in A}P^2(n)=\sum_{\substack{mp\le x\\p>\sqrt{x}}}p^2=\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\le p\le\frac{x}{m}}p^2=\sum_{m\le\sqrt{x}}\left(\sum_{p\le\frac{x}{m}}p^2-\sum_{p\le\sqrt{x}}p^2\right)$$

把引理 2 代入上式, 得

$$\begin{aligned}\sum_{n\in A}U(n)P(n)&=\sum_{m<\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}\left(\frac{x^3}{3}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i\frac{x}{m}}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\\&=\frac{x^3}{3}\sum_{m\le\sqrt{x}}\sum_{i=1}^{k}\cdot\frac{b_i(m)}{\ln^i\frac{x}{m}}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\\&=\frac{x^3}{3}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}-\sum_{m\ge\sqrt{x}}\frac{1}{m^3}\right)+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\\&=\frac{\zeta(3)}{3}x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}$$

上式中的 $b_i(m)$ 表示与 m 有关的常数,c_i 与 d_i 是不依赖任何变量的可计算常数.

(ii) 当 n 属于 B 情况时，此时有 $m<\sqrt[3]{n},U(n)=2P(n)$, p 为素数, 从而有

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in B}U(n)P(n)\\&=2\sum_{n\in B}P^2(n)=2\sum_{\substack{mp^2\le x\\m<p\\\sqrt[3]{x}<p<\sqrt{x}}}p^2\le 2\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p\le\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2\\&=2\sum_{m\le x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{x}{m}\pi(\sqrt{\frac{x}{m}})-\sqrt[3]{x^2}\pi(\sqrt[3]{x})-2\int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{\frac{x}{m}}}y\pi(y)\mathrm{d}y\right)=O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}\right)\end{aligned}$$

(iii) 当 n 属于 C 情况时, 此时有 $m<\sqrt[3]{n}$, 从而有 $U(n)=P(n)$

$$\begin{aligned}\sum_{n\in C}U(n)P(n)&=\sum_{n\in C}P^2(n)=\sum_{\substack{mpp_1\le x\\\sqrt[3]{x}<p_1<p<\sqrt{x}}}p^2=\sum_{m\le\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\sum_{p_1<p<\frac{x}{p_1m}}p^2\\&=\sum_{m\le\sqrt[3]{x}}\sum_{\sqrt[3]{x}<p_1<\sqrt{\frac{x}{m}}}\left(\frac{x^3}{p_1^3m^3}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{\ln^i\frac{x}{p_1m}}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\right)\\&=\sum_{m\le\sqrt[3]{x}}(\frac{x^3}{m^3}\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i(m)}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{e_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)\end{aligned}$$

上式中的 $d_i(m)$ 是与 m 有关的常数,e_i 是不依赖任何变量的可计算常数.

(iv) 当 n 属于 D 情况时, 此时 $U(n)=P(n)$

$$\sum_{n\in D}U(n)P(n)=\sum_{\substack{mp\le x\\ p_1|m,p_1<\sqrt[3]{x}\\ \sqrt[3]{x}<p<\sqrt{x}}}p^2\ll\sum_{\substack{x^{\frac{1}{2}}<m\le x^{\frac{2}{3}}\\ p_1|m,p_1<\sqrt[3]{x}\\ \sqrt[3]{x}<p<\sqrt{x}}}\sum_{x^{\frac{1}{3}}<p\le x^{\frac{1}{2}}}p^2$$

$$\ll\sum_{p_1\le\sqrt[3]{x}}\sum_{x^{\frac{1}{3}}<p\le x^{\frac{1}{2}}}p^2\ll\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\ln x}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}=\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}$$

(v) 当 n 属于 E 情况时，此时可设 $U(n)=\alpha\cdot p$, $p\le P(n),\alpha\le\frac{\ln n}{\ln P(n)}$, 我们有

$$\sum_{n\in E}U(n)P(n)=\sum_{\substack{mp^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1,p\le x^{\frac{1}{3}}}}\alpha p^2\ll\sum_{\substack{mp^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1,p\le x^{\frac{1}{3}}}}p^{2\alpha}\ll\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1,p\le x^{\frac{1}{3}}}}p^{2\alpha}\sum_{m\le\frac{x}{p^\alpha}}1$$

$$\ll\sum_{\substack{p^\alpha\le x\\ \alpha\ge 1,p\le x^{\frac{1}{3}}}}p^{2\alpha}\frac{x}{p^\alpha}\ll x\cdot x\cdot x^{\frac{1}{3}}\ll x^{\frac{7}{3}}$$

综合以上所有, 得

$$\sum_{n\le x}U(n)P(n)=x^3\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1}x}\right)$$

参 考 文 献

[1] 薛社教. 一个新的算术函数及其均值 [J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(3):251-254.

[2] 徐哲峰.Smarandache 函数的均值分布性质 [J]. 数学学报,2006,49(5):1009-1012.

[3]Chen Jianbin .Value distribution of the F.Smarandache LCM function [J].Scientia Magana,2007,3(2):15-18.

[4] Chen Jianbin.An equation involving the F.Smarandache muitiplicative function[J]. Scientia Magana,2007,3(2): 60-65.

[5] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布 [J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23(2):235-238.

[6] 潘承洞，潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社,1988.

[7] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York:Springer-Verlag, 1976.

A hybrid mean value formula involving Smarandache function

HE Yan-feng [1,2], TIAN Qing [2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000,China;

2.Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127,China)

Abstract: The main purpose of this paper is using the analytic property of the prime function $\pi(x)$ and Riemann zeta-function $\zeta(s)$ and method of dividing interval to study the hybrid mean value involving Smarandache function and the greatest prime divisor function, and give an asymptotic formula.

Keywords: Smarandache function , Abel'identity, Riemann zeta-function

2000MSC: 11B83